

آزمون ریاضی ۲ رکن شهر چینی ۹۴، ۹۵، ۹۶ * وقت: ۱۰۰ / ۱۰۰ / ۱۰۰
 دقیقه / ثانیه / دقیقه
 ۳۰ دقیقه

۱- اگر اندازه های اضلاع یک مثلث قائم الزامی تسلسلی یک دنباله حسابی باشد نسبت آن به عدد نشان دهنده نسبت اندازه های ضلع کوچکتر به ضلع بزرگتر مثلث هوایه $\frac{3}{5}$ باشد (۱.۵)

با ضلع: $a^2 + d^2 + 2ad = a^2 + d^2 + 2ad \Rightarrow a^2 + d^2 + 2ad + a^2 = a^2 + d^2 + 2ad + a^2$
 $\Rightarrow a^2 = 2ad \Rightarrow a = 2d$ ضلع کوچکتر = $2d$
 ضلع بزرگتر = $5d$

$\frac{\text{ضلع کوچکتر}}{\text{ضلع بزرگتر}} = \frac{2d}{5d} = \frac{2}{5}, d \neq 0$

۲- در دنباله هندسی $\{a_n\}$ داریم: $a_1 + a_2 = \frac{9}{2}$ و $a_2 + a_3 = \frac{9}{4}$ مقادیر a_1 و a_2 را بیابید.

نسبت آریتمی (۱.۵)
 $\begin{cases} a_1 q + a_1 q^2 = \frac{9}{2} \\ a_1 q^2 + a_1 q^3 = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{a_1 q(1+q^2)}{a_1 q^2(1+q^2)} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{9}{4}} \Rightarrow \frac{1}{q} = 2 \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow q = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $q = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} a + a \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow a(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}+1}{2} a = \frac{9}{2} \Rightarrow a = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$
 $q = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} a + a(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow a(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{9}{2} \Rightarrow a = -\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ (۱.۵)

۳- اگر x عددی باشد که در نامعادلات زیر صدق کند آن گاه x در یکی از اول دنباله تقریبات (۱)

(۱) $2x + 1 < 1, 1314$ و $4x < 4, 443$ (تقریب کتاب)
 $\begin{cases} 4 - 2, 824, 63 < x \\ 3, 8457 < x \\ 2x < 1, 1314 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3, 8457 < x \\ x < 3, 8458 \end{cases} \rightarrow 3, 8457 < x < 3, 8458$
 $x \in \{3, 8457, 3, 8458, 3, 8459, \dots\}$

۴- حاصل عبارات را ساده کنید (۱.۵)
 $\sqrt{5\sqrt{2}+7} - \sqrt{5\sqrt{2}-7} = 2$
 $= \sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(2\sqrt{2}-1)^2} = 2\sqrt{2}+1 - (2\sqrt{2}-1) = 2$

ب) $\frac{(2+\sqrt{2})^{\sqrt{2}-1} \times (2-\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1}}{2-4\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^{-\sqrt{2}+1} \times (2-\sqrt{2})^{\sqrt{2}+1}}{2-4\sqrt{2}} = \frac{(2-\sqrt{2})^2}{2-4\sqrt{2}}$
 $= \frac{2-4\sqrt{2}}{2-4\sqrt{2}} = 1$

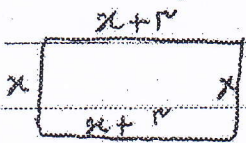
ج) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{9+4\sqrt{5}} = |2-\sqrt{5}| + \sqrt{(2+\sqrt{5})^2}$
 $= |2-\sqrt{5}| + |2+\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2 + 2+\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

۵- تعریف‌های زیر را کامل کنید: (۱۵)

الف) رابطه $f: A \rightarrow B$ تابعی باشد هرگاه... هر عضو از مجموعه A فقط به یک عضو از مجموعه B مناسبت داشته باشد.

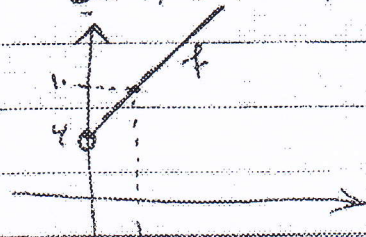
ب) مجموعه‌های A و B مرتبه‌ها هر دو برابر و تابعی یک به یک باشد هرگاه... در این حالت نیز هر دو طرف اول نظریه مناسبت به هم و معادل بودن تکراری هم نداشته باشند.

۴- در یک مستطیل هر دو طول آن ۳ واحد از عرض آن بیشترند. ضابطه نمودار تابعی f را مشخص کنید که در آن x سطح تابعی از عرض آن باشد. (۱۵) (تئوری کتاب)



$$P = 2x + 2(x+3) = 4x + 6$$

$$f(x) = 4x + 6, \quad 0 < x$$



۷- تعیین کنید کدام رابطه تابعی از x به y است (۱۰)

الف) $x^2 + y^2 + 10 = 2x^2 - 4y$

ب) $x^2 = y^3 - y + 7$

$$(x^2 - 2x^2 + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 0$$

$$(x^2 - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

منطقه $x = \sqrt{7} \Rightarrow y = y^3 - y + 7 \Rightarrow y^3 - y = 0$

$$y(y^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموعه}} f = \{(1, -2), (-1, -2)\}$ تابع هست

۸- اگر $f = \{(a+3, b), (a^2+2, 2b), (a^2+2, b+3), (a^2+1, b), (5, 3a)\}$

هر دو تابع معکوس نیز باشد آن گاه تابع f^{-1} را مشخص کنید. (۱۵)

ب) $2b = b + 3 \Rightarrow b = 3$

ا) $a+1 = a+3 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$

الف) $\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow f = \{(2, 9), (3, 4), (3, 4), (4, 9), (5, -3)\} = \{(2, 9), (3, 4), (5, -3)\}$

$\Rightarrow f^{-1} = \{(9, 2), (4, 3), (-3, 5)\}$

ب) $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \rightarrow f = \{(8, 9), (4, 4), (4, 9), (5, 9), (5, 4)\}$ این معکوس ق.و.ق. ندارد

۹- یک تابع پیوسته را در نظر بگیرید که $f(x) = 12x^2 - 12x + 4x + 1$ باشد.

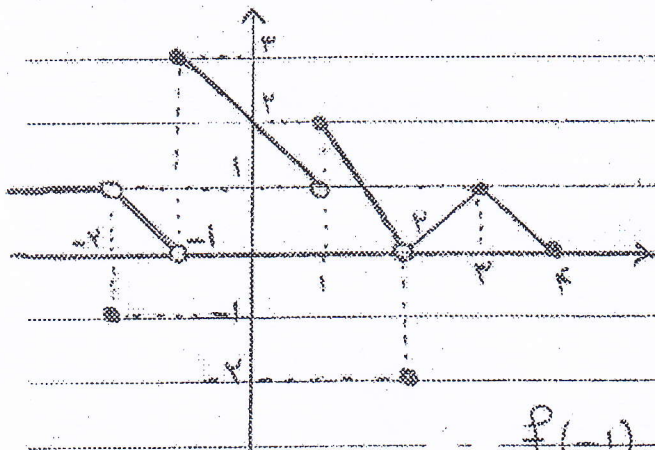
۱) $f(x) = (2x-1)^2 + 2$ ۲) $f(x) = (2x-1)^2 + 2$

$f(a) = f(b) \Rightarrow (2a-1)^2 + 2 = (2b-1)^2 + 2 \Rightarrow (2a-1)^2 = (2b-1)^2 \Rightarrow 2a-1 = 2b-1$

$\Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow a = b \Rightarrow (1-1) \rightarrow$ ۳) $f(x) = (2x-1)^2 + 2$

$y = (2x-1)^2 + 2 \Rightarrow (2x-1)^2 = y-2 \Rightarrow 2x-1 = \sqrt{y-2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{y-2} + 1}{2}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{\sqrt{y-2} + 1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x-2} + 1}{2}$



۱۰- با توجه به نمودار تابع f پاسخ دهید:

الف) D_f و R_f را تعیین کنید.

$D_f = (-\infty, 4]$, $R_f = [0, 3] \cup \{1, 2\}$

ب) مقدار $f^{-1}(1) + f^{-1}(2) + f^{-1}(3) + f^{-1}(4)$ را بیابید.

$f^{-1}(1) + f^{-1}(2) + f^{-1}(3) + f^{-1}(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

۱۱- دنباله $\{a_n\}$ را در نظر بگیرید که $a_n = f(f(\dots(f(x))\dots))$ باشد.

$a_1 = f(x) = 1$
 $a_2 = f(f(x)) = f(1) = 2$
 $a_3 = f(f(f(x))) = f(2) = 3$
 $a_4 = f(f(f(f(x)))) = f(3) = 4$

این: $1, 2, 3, 4, \dots$ ۱۲- $a_n = \begin{cases} 1 & n=8k-7 \\ 2 & n=8k-6 \\ 3 & n=8k-5 \\ 4 & n=8k-4 \\ 5 & n=8k-3 \\ 6 & n=8k-2 \\ 7 & n=8k-1 \\ 8 & n=8k \end{cases}$

۱۲- $f(x)$ را در نظر بگیرید که $f(x+1) + f(x-1) = 4x - 12$ باشد.

اگر $f(x) = ax + b \Rightarrow f(x+1) = a(x+1) + b = ax + a + b$ ۱۳- $f(x) = 2x - 8$

$f(x-1) = a(x-1) + b = ax - a + b \Rightarrow (ax + a + b) + (ax - a + b) = 4x - 12$

$\Rightarrow 2ax + (2b) = 4x - 12 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 \rightarrow a = 2 \\ 2b = -12 \rightarrow b = -6 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = 2x - 6 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+6}{2}$

۱۴- $f(\sqrt{x-1})$ را در نظر بگیرید که $f(x - \frac{1}{2x}) = x + \frac{1}{2x}$ باشد.

$f(x - \frac{1}{2x}) = (x - \frac{1}{2x}) + 2(x)(\frac{1}{2x}) \Rightarrow f(t) = t + 1 \Rightarrow f(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1}) + 1$

$= a - 1 + 1 = a$

پاسخ: